❉ Chapitre 22 ❉

Système de deux équations à deux inconnues

Objectif du chapitre :

- Résoudre graphiquement un système de deux équations linéaire à deux inconnues.
- Résoudre analytiquement un système de deux équations linéaire à deux inconnues.

I. Définition

Définition 1:

Résoudre le **système linéaire** $(S) : \left\{\begin{array}{cccc} ax & + & by & = & c \\ a'x & + & b'y & = & c' \end{array}\right.$ c'est trouver tous les couples de réels $(x; y)$ appelés **solutions du système** qui vérifient à la fois les deux équations.

Exemple 1:

Le couple $(2; 1)$ est une solution de $(S) : \left\{\begin{array}{ccccc} 2x & + & y & = & 5 \\ x & + & 4y & = & 6 \end{array}\right.$ car : $\left\{\begin{array}{ccccc} 2\times 2 & + & 1 & = & 5 \\ 2 & + & 4\times 1 & = & 6 \end{array}\right.$

II. Interprétation graphique

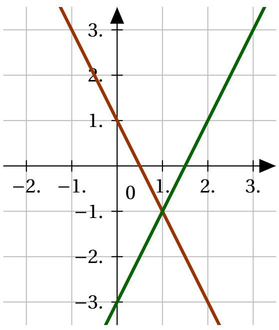
Propriété 1 :

Les équations $ax + by = c$ et $a'x + b'y = c'$ définissent, dans un repère, deux droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$.
Résoudre le système (S) revient à trouver les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$.

- Si $ab' - a'b \neq 0$, les droites ne sont pas parallèles et le système admet une solution unique,
- Si $ab' - a'b = 0$ les droites sont parallèles (strictement ou non) et le système n'admet aucune solution ou une infinité de solutions.

Exemple 2:

On considère le système $S_1 : \left\{\begin{array}{ccccc} 2x & + & y & = & 1 \\ -2x & + & y & = & -3 \end{array}\right.$



- $ab' - a'b = 2\times 1 - (-2)\times 1 = 4 \neq 0$
  les droites sont donc sécantes.
- On trace $d_1 : y = -2x + 1$ et $d_2 : y = 2x - 3$,
- On lit le point d'intersection : $\mathscr{S} = \{(1; -1)\}$.

III. Méthodes de résolution par le calcul

1. Résolution par substitution

Méthode 1 : *Par substitution*

Résoudre le système $(S) : \left\{\begin{array}{rcrcr} 4x & + & y & = & 7 \\ 3x & - & 2y & = & 8 \end{array}\right.$ par **substitution**.

Il s'agit d'exprimer une inconnue en fonction de l'autre à l'aide d'une des deux équations et de la remplacer par l'expression obtenue dans l'autre équation :

$$(S) \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcc} y & = & -4x+7 \\ 3x-2(-4x+7) & = & 8 \end{array}\right. \quad \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcc} y & = & -4x+7 \\ 3x+8x & = & 8+14 \end{array}\right.$$

$$(S) \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcc} y & = & -4x+7 \\ 11x & = & 22 \end{array}\right. \quad \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcc} y & = & -4\times 2+7 \\ x & = & 2 \end{array}\right. \quad \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcc} y & = & -1 \\ x & = & 2 \end{array}\right.$$

D'où : $\mathscr{S} = \{(2;-1)\}$

Remarque :

La méthode par substitution n'est à utiliser (et encore ...) que lorsqu'une inconnue s'exprime *très facilement* en fonction de l'autre.

2. Résolution par combinaison linéaire puis substitution

Méthode 2 : *Par combinaison linéaire puis substitution*

Résoudre le système $(S) : \left\{\begin{array}{rcrcrl} 2x & - & 3y & = & 8 & (L1) \\ 5x & + & 4y & = & -3 & (L2) \end{array}\right.$ par **combinaison linéaire**.

On multiplie la première équation par 5 et la deuxième par (-2) de manière à éliminer la variable x et on additionne les deux équations membres à membres :

$$(S) \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrl} 10x & - & 15y & = & 40 & (5L1) \\ -10x & - & 8y & = & 6 & (-2L2) \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrl} & - & 23y & = & 46 & (L1+L2) \\ -10x & - & 8y & = & & 6 \end{array}\right.$$

On obtient $y=-2$ et on remplace dans l'une des deux équations :

$$(S) \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcc} y & = & -2 \\ 2x-3\times(-2) & = & 8 \end{array}\right. \quad \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcc} y & = & -2 \\ 2x & = & 8-6 \end{array}\right. \quad \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcc} y & = & -2 \\ x & = & 1 \end{array}\right.$$

D'où $\mathscr{S} = \{(1;-2)\}$

3. Résolution par combinaison linéaire

Méthode 3 : *Par combinaison linéaire*

On peut enfin utiliser la méthode par combinaison linéaire afin de trouver directement les 2 variables :

$$(S) \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrl} 10x & - & 15y & = & 40 & (5L1) \\ -10x & - & 8y & = & 6 & (-2L2) \end{array}\right. \qquad (S) \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrl} 8x & - & 12y & = & 32 & (4L1) \\ 15x & - & 12y & = & -9 & (3L2) \end{array}\right.$$

$$-23y = 46 \qquad\qquad 23x = 23$$

$$y=-2 \qquad\qquad x=1$$

D'où $\mathscr{S} = \{(1;-2)\}$